

Theorie Woche 9:

◦ Ausgleichsrechnung: Skript ab S. 119

In der echten Welt läuft praktisch nichts perfekt nach Modell ab, deshalb ist es zwar gut und schön, dass wir perfekte Gleichungssysteme (n Gleichungen für n Unbekannte, oder m Gleichungen für n Unbekannte mit erfüllten Kompatibilitätsbedingungen) mithilfe des Gauss-Algorithmus lösen können, jedoch treten solche Systeme praktisch nirgends auf. Realistisch gesehen haben wir fast immer mehr Messungen, als wir benötigen, und noch schlimmer, unerfüllte Kompatibilitätsbedingungen. Dies einfach, weil unsere Modellbildung nicht immer perfekt ist. In solchen Fällen kommt die sogenannte Ausgleichsrechnung zu tragen, welche eine mathematische Optimierungsmethode ist, mit dem Ziel, die Parameter des LGS möglichst "gut" anzunähern, um das LGS zu lösen.

Doch was heißt "gut"? Da scheiden sich die Geister. Was wir im Rahmen der Vorlesung betrachten, ist die sogenannte Methode der kleinsten Quadrate, bei der es darum geht, die Fehlerquadrate möglichst klein zu halten.

Diese Methode kann man auf unterschiedliche ①

Arten anzuwenden, wir unterscheiden die Ausgleichsrechnung mit Hilfe der

- Normalengleichung: Skript S. 119 - 124
- QR-Zerlegung: Skript S. 125 - 130
- Singulärwertzerlegung: folgt noch

Der Grund für die verschiedenen Methoden liegt wieder einmal in der Numerik und der Stabilität der Algorithmen, sowie im Anwendungsbereich.

Die Kochrezepte sowie mehrere Beispiele zu den ersten beiden Methoden finden sich im Skript.

o Determinante: Skript S. 31 - 54

Die Determinante ist eine Funktion, welche jeder $n \times n$ Matrix eine reelle Zahl zuordnet.

⚠ Nicht definiert für nicht-quadratische Matrizen.

(Gram'sche Determinante einmal ausser vor gelassen.)

Definitionen und Berechnungsmethoden sowie unzählige Beispiele finden sich im Skript. Bemerkenswert sind die Regel von Sarrus (S.31) sowie der Laplace'sche Entwicklungssatz (S.32).

Unbedingt merken müsst ihr euch die Eigenschaften der Berechnung (S.33) sowie, fast

noch wichtiger, die Rechenregeln (S. 35).

Es werden sehr gerne Aufgaben zu Determinanten gestellt, in welchen eine einfache Anwendung der Rechenregeln grossen Rechenaufwand spart.

Für viele Studenten lohnt es sich auch, die grafische Repräsentation der Determinanten zu betrachten. In der Videoreihe "Essence of linear Algebra" gibt es ein super Video hierzu.